Prof. Dr. Alfred Toth

Die Matrizen der tetradischen semiotischen Gruppen

1. Wie aus Toth (2008, S. 39 ff.) hervorgeht, wo die 3 semiotischen triadischen (abelschen) Gruppen, ihre 3 kommutativen und 6 nicht-kommunikativen Quasigruppen, semiotische Loops sowie die Orthogonalitätsbedingung der semiotischen Quasigruppen untersucht worden waren, sind wir in der gruppentheoretischen Semiotik, unabhängig von der relationalen Valenz der zugrunde liegenden Zeichendefinition, vor allem an Matrizen interessiert, welche identische Nebendiagonalen haben. Bei den triadischen Gruppen sind dies also die drei Fälle (1-1-1), (2-2-2) und (3-3-3), die in je zwei Matrizen aufscheinen, welche die Konstruktionsprinzipien für die semiotischen Gruppen wie die kommutativen Quasigruppen enthalten.

2. Bei den tetradischen Gruppen gehen wir aus von der in Toth (2009) eingeführten tetradischen Zeichenklasse

ZR+ = (.3., .2., .1., .0.),

sie ist eine legitime Erweiterung der Peirceschen Zeichendefinition, da die leere Menge, die wir als Nullzeichen definiert hatten, Teilmenge jeder Menge und somit auch derjenigen der Primzeichen (Bense 1980) ist. Wenn wir also tetradische Matrizen aus ZR+ herstellen wollen, können wir z.B. von Matrizen mit konstanter Nebendiagonale (0-0-0-0) ausgehen und also alle 6 Permutationen der verbleibenden 3 Primzeichen, d.h.

1-2-3
1-3-2
2-3-1
2-1-3
1-3-2
1-2-3

in der 1. Zeile der Matrix mit jeder dieser 6 Permutationen in der 4. Zeile kombinieren und bekommen so 36 tetradische Matrizen mit Nebendiagonale 0.

3. Das Problem ist nur, dass wir auf diese Weise zu viele, darunter wertlose, Matrizen bekommen, nämlich solche, die keine lateinischen Quadrate sind, d.h.

solche, bei denen ein Primzeichen mehrmals in einer Zeile oder Spalte auftaucht; vgl. z.B.

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 0 \\
2 & 3 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 2 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 0 \\
 & 3 & 0 & \\
 & 0 & & \\
0 & 1 & 3 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 0 \\
 & & 0 & \\
 & 0 & & \\
0 & 2 & 3 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 0 \\
 & & 0 & \\
 & 0 & & \\
0 & 2 & 1 & 3
\end{array}
$$

Umgekehrt gibt es ferner Kombinationen von 1. und 4. Zeilen, die zu zwei und nicht nur einer Matrize führen, vgl. z.B.

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 3 \\
3 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 3 & 2 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 3 & 2 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 3 \\
3 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 3 & 1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 3 \\
3 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 3 & 1 & 2
\end{array}
$$

Natürlich wiederum mit der Einschränkung, dass mit dieser Methode erneut einerseits zu viele, anderseits zu wenige Matrizen aufscheinen, können wir dasselbe Verfahren anschliessend für die Primzeichen 1, 2 und 3 als konstante Nebendiagonal-Werte anwenden.

Will man also ganz sicher gehen, so konstruiert man die lateinischen Quadrate, wie man es gelernt hat, d.h. also, man schreibt für ein n-Quadrat die Zahlenfolge 1 ... n einmal als Zeile und einmal als Spalte und erhält so automatisch konstante Nebendiagonalen. Im tetradischen Fall also:

$$
\begin{array}{cccc}
a & b & c & d \\
b & c & d & a \\
c & d & a & b \\
d & a & b & c
\end{array}
$$

Nun kann man also eifnach d = 0 (oder = 1, = 2, = 3) setzen und käuft somit keine Gefahr mehr, durch Permutationen bedingt Überestimmungen bei Transpositionen wie z.B. (213/312) zu haben:

4. Nebendiagonale d = 0

a = 1, b = 2 c = 3 | a = 1, b = 3, c = 2

1	2	3	0		1	3	2	0
2	3	0	1		3	2	0	1
3	0	1	2		2	0	1	3
0	1	2	3		0	1	3	2

a = 2, b = 3, c = 1 | a = 2, b = 1, c = 3

2	3	1	0		2	1	3	0
3	1	0	2		1	3	0	2
1	0	2	3		3	0	2	1
0	2	3	1		0	2	1	3

a = 3, b = 1, c = 2 | a = 3, b = 2, c = 1

3	1	2	0		3	2	1	0
1	2	0	3		2	1	0	3
2	0	3	1		1	0	3	2
0	3	1	2		0	3	2	1

5. Nebendiagonale d = 1

a = 0, b = 2 c = 3 | a = 0, b = 3, c = 2

0	2	3	1		0	3	2	1
2	3	1	0		3	2	1	0
3	1	0	b		2	1	0	3
1	0	2	3		1	0	3	2

a = 2, b = 3, c = 0 | a = 2, b = 0, c = 3

2	3	0	1		2	0	3	1
3	0	1	2		0	3	1	2
0	1	2	3		3	1	2	0
1	2	3	0		1	2	0	3

a = 3, b = 2, c = 0

3	2	0	1
2	0	1	3
0	1	3	2
1	3	2	0

a = 3, b = 0, c = 2

3	0	2	1
0	2	1	3
2	1	3	0
1	3	0	2

6. Nebendiagonale d = 2

a = 0, b = 3, c = 1

0	3	1	2
3	1	2	0
1	2	0	3
2	0	3	1

a = 0, b = 1, c = 3

0	1	3	2
1	3	2	0
3	2	0	1
2	0	1	3

a = 1, b = 3, c = 0

1	3	0	2
3	0	2	1
0	2	1	3
2	1	3	0

a = 1, b = 0, c = 3

1	0	3	2
0	3	2	1
3	2	1	0
2	1	0	3

a = 3, b = 0, c = 1

3	0	1	2
0	1	2	3
1	2	3	0
2	3	0	1

a = 3, b = 1, c = 0

3	1	0	2
1	0	2	3
0	2	3	1
2	3	1	0

7. Nebendiagonale d = 3

a = 0, b = 1, c = 2

0	1	2	3
1	2	3	0
2	3	0	1
3	0	1	2

a = 0, b = 2, c = 1

0	2	1	3
2	1	3	0
1	3	0	2
3	0	2	1

a = 1, b = 0, c = 2 a = 1, b = 2, c = 0

1	0	2	3		1	2	0	3
0	2	3	1		2	0	3	1
2	3	1	0		0	3	1	2
3	1	0	2		3	1	2	0

a = 2, b = 0, c = 1 a = 2, b = 1, c = 0

2	0	1	3		2	1	0	3
0	1	3	2		1	0	3	2
1	3	2	0		0	3	2	1
3	2	0	1		3	2	1	0

Es gibt also total, wie erwartet, 24 lateinische Quadrate und damit 12 semiotische tetradische abelsche Gruppen und 12 kommutative Quasigruppen. Da wir uns mit ihnen noch detailliert befassen werden, brechen wir hier diese Einführung ab.

Bibliographie

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: As Semeiotica III/3, 1980, S. 287-294

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. aufl. 2008

Toth, Alfred, Eine symmetrische, nicht-quadratische semiotische Matrix und ihre Zeichenklassen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009)

3.11.2009